

VARIATIONS ET LIMITES

I. Variations et dérivée.

1. Si une fonction f est dérivable et croissante sur un intervalle $[a;b]$, alors $f'(x) \geq 0$ sur $[a;b]$. Si f est décroissante, $f'(x) \leq 0$.
2. Réciproquement, si une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et si $f'(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ alors f est croissante sur $[a;b]$. Si $f'(x) \leq 0$ f est décroissante.

Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le signe de sa dérivée.

3. Conséquence

Si une fonction f , dérivable sur un intervalle $[a;b]$, admet un extremum local en une valeur $c \in]a;b[$ alors $f'(c) = 0$.

Remarque : La réciproque n'est pas vraie.

II. Limites

1. Définitions

On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut, il suffit que x soit suffisamment grand. Plus précisément, quelque-soit le réel A , on peut trouver un réel a tel que si $x \geq a$ alors $f(x) \geq A$. On dit aussi dans ce cas que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On dit qu'une fonction f tend vers Λ quand x tend vers α si pour que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de Λ , il suffit que x soit suffisamment proche de α . Plus précisément, quelque-soit le réel $\epsilon > 0$, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que si $|x - \alpha| \leq \delta$ alors $|f(x) - \Lambda| \leq \epsilon$. On dit aussi dans ce cas que f a pour limite Λ en α et on note $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \Lambda$.

On définit de façon semblable, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \Lambda$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

etc...

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

Remarque : En général, si une fonction f est définie pour un réel α , alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ mais ce n'est pas forcément le cas.

2. Opérations sur les limites

a. Somme

Si Λ est un nombre réel, si α est un nombre réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$ et si f et g sont des fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \Lambda$ et

$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = +\infty$. On peut résumer cette

propriété en écrivant : « $\Lambda + (+\infty) = +\infty$ ». On a de même
 « $\Lambda + (-\infty) = -\infty$ », « $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ »,
 et « $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ ».

Remarque : On ne peut rien dire à priori sur « $(+\infty) + (-\infty)$ ». On dit qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b. Produit

Ici Λ est un nombre réel non nul. On a

« $\Lambda \times (\pm\infty) = \pm\infty$ », « $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$ » et
 « $0 \times (\pm\infty)$ » est une forme indéterminée.

Remarque : On utilise la règle des signes pour déterminer s'il s'agit de $-\infty$ ou $+\infty$.

c. Quotient

Ici Λ est un nombre réel et Λ' est un nombre réel non nul. On a

« $\frac{\Lambda}{\pm\infty} = 0$ », « $\frac{\pm\infty}{\Lambda'} = \pm\infty$ »,

« $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » sont des formes indéterminées..

Remarque : Si la fonction garde un signe constant en s'approchant de 0 on a
 aussi « $\frac{\Lambda}{0} = \pm\infty$ » et « $\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$ »

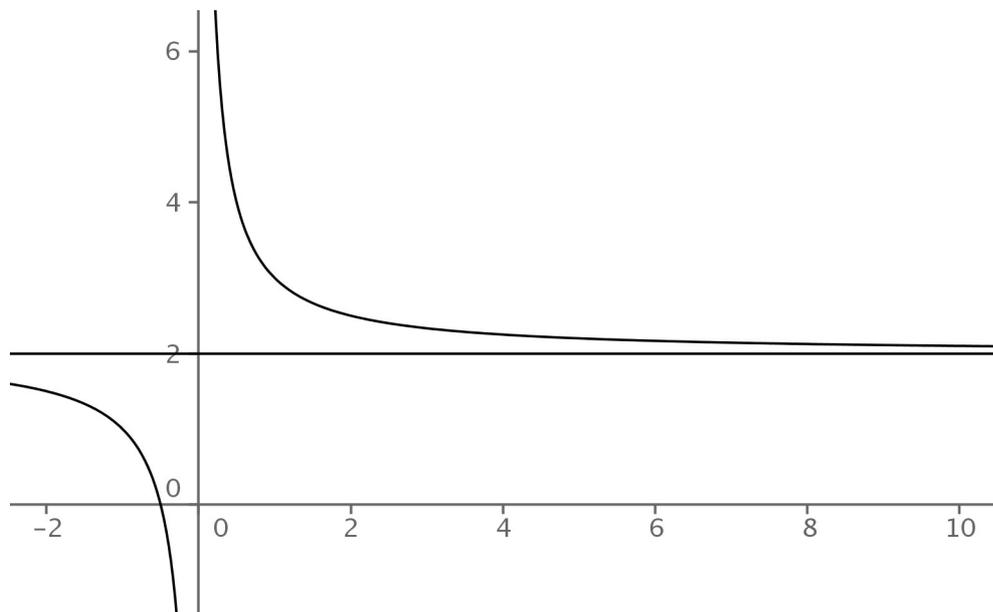
III. Asymptotes

1. Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \Lambda$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \Lambda$, on dit que la droite d'équation $y = \Lambda$ est une asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple : Pour la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} + 2$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2 = 0 + 2 = 2$ donc

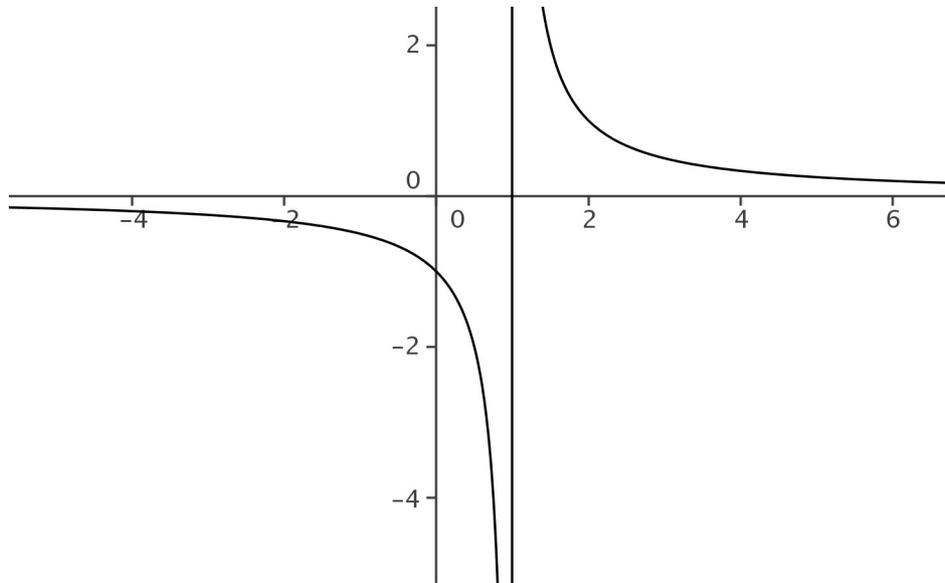
la courbe représentative de la fonction f a une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



2. Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe représentative de f .

Exemple : Pour la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x-1}$ on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.



3. Asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple : Pour la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} - x + 3$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote oblique d'équation $y = -x + 3$.

